PROBLEME D'ALGEBRE : 12 points

E est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

I_d est l'endomorphisme identité. Sa matrice sera notée I_n

Pour toute matrice M on notera $M_{i,j}$ le coefficient de sa i-ème ligne et j-ème colonne.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, de matrice M, on notera f^* l'endomorphisme associé à ${}^tM$, matrice transposée de M.

On prendra comme définitions respectives des polynômes caractéristiques de la matrice M et de l'endomorphisme f, $P_M(X) = \det(XI_n - M)$ et $P_f(X) = \det(XI_d - f)$.

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

Les polynômes considérés dans ce problème sont à coefficients réels.

1) A tout polynôme P de degré n défini par $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$, on associe l'endomorphisme f_p de E défini par :

$$f_p(e_i) = e_{i+1} \qquad \text{pour } 1 \le i < n$$
$$f_p(e_n) = -(a_n e_1 + a_{n-1}e_2 + ... + a_2 e_{n-1} + a_1 e_n)$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de f_p.

b) Montrer que $f_p^n + a_1 f_p^{n-1} + ... + a_{n-1} f_p + a_n I_d = 0$

2) Q est un polynôme unitaire de degré n tel que $Q \neq P$ et $Q(0) \neq 0$.

a) Montrer que f_Q est un endomorphisme inversible.

b) Montrer que $rg(f_Q^{-1} \circ f_p - I_d) = 1$

3) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique P défini au 1).

a) A tout vecteur v de E on associe l'endomorphisme g_v défini par $g_v(e_i) = g^{i-1}(v)$.

Calculer $g_v \circ f_p(e_i)$ pour $1 \le i \le n$.

b) $C_g = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h \circ f_p = g \circ h\}$

Montrer que $g_v \in C_g$.

c) Φ est l'application de E dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $\Phi(v) = g_v$. Montrer que Φ est linéaire.

d) Prouver que C_g est un espace vectoriel et dim $C_g \geq n$.

4) $\mathcal{F} = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid \text{mat}_{\mathcal{B}}(h) = A \text{ et } A_{ij} = A_{i+1,j+1} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n-1\}$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

b) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_b^* \circ h \circ f_b = h$. Montrer que $h \in \mathcal{F}$.

5) Le polynôme P unitaire et de degré n est dit réciproque si : $(\forall t \in \mathbb{R}^*)\ t^n P\left(\frac{1}{t}\right) = P(0)\,P(t)$

a) Caractériser les polynômes réciproques par une condition portant sur leurs racines, éventuellement complexes.

b) P étant réciproque, calculer le polynôme caractéristique de $(f_b^{-1})^*$.

En déduire que $C_{(f_b^{-1})^*} = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid f_b^* \circ h \circ f_b = h\}$.

6) P et Q sont 2 polynômes unitaires, réciproques, de degré n.

a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$, $h \neq 0$, telle que :

$$f_b^* \circ h \circ f_b = f_Q^* \circ h \circ f_Q = h$$

b) Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme h non nul dont la matrice est soit symétrique, soit antisymétrique, vérifiant la double égalité précédente.

c) Dans le cas où $P(X) = X^3 + 5X^2 - 5X - 1$ et $Q(X) = X^3 + 4X^2 + 4X + 1$, déterminer tous les endomorphismes h, de matrice symétrique, vérifiant la double égalité du 6) a).

PROBLEME DE GEOMETRIE : 8 points

Le plan affine est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A est le point de coordonnées (4,0) et B est un point variable de l'axe des ordonnées.

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M du plan vérifiant $\left|\vec{BM}\right| = 4$ et $\vec{MB}.\vec{MA} = 0$ est la réunion d'une droite $\mathcal{D}$ et d'une courbe $\mathcal{C}$.

2) Construire la courbe $\mathcal{C}$.

3) Montrer que $\mathcal{C}$ est le support de l'axe γ paramétré par $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto M\left(4\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ 4t\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.

4) Deux droites orthogonales passant par l'origine recoupent en général la courbe $\mathcal{C}$ en deux points C et D distincts.

a) Déterminer l'équation de la droite (CD) en fonction du coefficient directeur de l'une des droites orthogonales.

b) Montrer que toutes les droites (CD) passent par un même point lorsque les droites orthogonales varient.

5) Deux droites passant par l'origine et symétriques par rapport à la première bissectrice des axes de coordonnées recoupent en général la courbe $\mathcal{C}$ en deux points distincts E et F.

a) Déterminer l'équation de la droite (EF) en fonction du coefficient directeur de l'une des droites symétriques.

b) Déterminer l'enveloppe de $\mathcal{E}$ des droites (EF) lorsque les droites symétriques varient.

6) Déterminer le centre de courbure I à la courbe $\mathcal{C}$ en A.